

Міністерство освіти і науки України

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

**Методичні вказівки та учбові завдання до
курсу “Теорія ймовірностей” для курсантів
Військового інституту**

Київ- 2001

Складач А. В. Виноградська, канд. фіз.-мат наук.

Вступ.....	
Розділ1.Випадкові події.....	
1.2. Стохастичний експеримент. Простір елементарних подій.....	
1.3. Класичне визначення ймовірності.....	
1.4. Поняття алгебри та σ - алгебри.....	
1.5. Гометрична інтерпретація ймовірностей	
1.6.Аксиоми теорії ймовірностей.....	
1.7. Теорема додавання ймовірностей.....	
1.8. Умовні ймовірності. Незалежні випадкові події.....	
1.9 Формула повної ймовірності. Формула Байеса.....	
Розділ2. Випадкові величини.....	
2.1.Випадкові величини – функції в просторі елементарних подій.....	
2.2. Дискретні випадкові величини.....	
2.3. Абсолютно неперервні випадкові величини.....	
Розділ 3.Послідовності випадкових величин.Граничні теореми.....	
3.1.Закон великих чисел.....	
3.2. Посилений закон великих чисел.....	
3.3. Центральна гранична теорема.....	
Список літератури.....	

Вступ

Методичні вказівки присвячені основним розділам курсу “ Теорії ймовірностей “ таким як “Випадкові події”, “ Випадкові величини”, “ Граничні теореми”.В посібнику розглядається теоретичні положення курсу по кожному розділу, основні поняття ілюструються прикладами. Показано, як теоретичний матеріал застосовується до розв’язку задач.

Мета розробки- сприяти більш глибокому засвоєнню дисципліни.

1.1 Стохастичний експеримент. Простір елементарних подій

Вихідним поняттям теорії ймовірностей є поняття стохастичного експерименту, випадкової події та ймовірності випадкової події. *Стохастичними називають експерименти, які можна повторити будь-яку кількість раз, але результати яких не можна напевне передбачити.* В основі теоретико-множиного методу викладу теорії ймовірностей лежить припущення, що кожному стохастичному експерименту поставлено у відповідність деяка множина Ω , точки якої зображають всі можливі наслідки даного експерименту. Множину Ω називають простором елементарних подій, а його точки – елементарними подіями. Таким чином, простір елементарних подій Ω це сукупність всіх можливих наслідків стохастичного експерименту.

Приклад1. Припустимо, що монету підкидають один раз. Простір елементарних подій, цього експерименту має вигляд $\Omega = \{Г, Р\}$, де Г означає появу герба, буква Р-появу решки.

Приклад2. Монету підкидають двічі. Простором елементарних подій цього експерименту є множина $\Omega = \{ГГ, ГР, РГ, РР\}$. Тут ГР означає, наприклад, що при першому підкиданні з'явився герб, а при другому- решка.

Приклад 3. Підкидають шестиграний гральний кубик на якому вибиті очки від 1 до 6. Нас цікавить число очок, яке випало. Простіром елементарних подій тут може бути множина, яка складається з чисел 1,2,3,4,5,6, тобто $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

В прикладах розглянутих вище простір елементарних подій був **скінченною множиною**. Але в багатьох задачах теорії ймовірностей експерименти мають **нескінченне число** можливих наслідків.

Приклад 4. Будемо вважати, що монету підкидають до першої появи герба. Простором елементарних подій такого експерименту є множина

$$= \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots, \omega_\infty\}, \text{ де } \omega_n = \underbrace{РРРРР\dots}_n РГ \text{ означає, що герб вперше}$$

n-1 раз

з'явиться при n-тому підкиданні монети, а ω_∞ відповідає тій можливості, що герб ніколи не з'явиться (в цьому випадку наш експеримент продовжується нескінченно довго, Ω -зліченна множина).

Неважко уявити собі задачу, де множина всіх наслідків стохастичного

експерименту незліченна.

6

Приклад 5 . Нехай експеримент полягає у вимірюванні двох величин, які набувають значення з відрізка $[0, 1]$. Простір елементарних подій $\Omega = \{ (x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \}$ має континуум наслідків, так як результатом може виступити довільна точка відрізка $[0, 1]$.

1.2 ВИПАДКОВІ ПОДІЇ ТА ОПЕРАЦІЇ НАД НИМИ

Будь-яка підмножина A простору елементарних подій ($A \subseteq \Omega$) називається **випадковою подією**. При цьому Ω - **достовірна подія**, тобто подія, яка відбувається при будь-якому наслідку стохастичного експерименту.

Говорять, що подія A напустила, якщо напустила, яка небусть з **елементарних подій** $\omega \in A$.

Приклад 1. Припустимо, що один раз підкидають гральний кубик і A – подія, яка полягає в тому, що число очок, яке з'явиться, ділиться на 3. Тоді $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{3, 6\}$.

Приклад 2. Припустимо, що монету підкидають до першої появи герба. Нехай A – подія, яка полягає в тому, що буде зроблено не більше трьох підкидань. Тоді $A = \{\Gamma, P\Gamma, PP\Gamma\}$, $\Omega = \{\Gamma, P\Gamma, PP\Gamma, PPP\Gamma, PPPP\Gamma, \dots, \underbrace{PPPPPP}_{n-1 \text{ раз}} \dots P\Gamma, \dots\}$.

n-1 раз

Таким чином, **випадкові події** пов'язані з даним стохастичним експериментом – **підмножини в просторі елементарних подій Ω** .

Сумою двох подій A та B називається **подія** $A + B$ ($A \cup B$), яка складається з елементарних подій, які належать хоча б одній із подій A або B .

Добутком AB ($A \cap B$) називається **подія**, яка складається з елементарних подій які належать одночасно і A і B .

Різниця подій A та B відповідає множині $A - B$ ($A \setminus B$), яка складається з тих елементів A , які не належать B . $\bar{A} = \Omega - A$ називається **доповненням** до події A .

Правило де Моргана $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

Відзначимо, що основні поняття теорії множин можна також подати мовою теорії ймовірностей.

Теорія множин	Теорія ймовірностей
—	
Множина Ω	Ω - простір елементарних подій
—	
Множина Ω	Ω - достовірна подія-подія, яка відбувається при кожному здійсненні експерименту.
—	
\emptyset (порожня множина)	\emptyset -неможлива подія- подія, яка не відбувається при будь-якому здійсненні експерименту.
—	
$A \subset B$	з події A випливає подія B
—	
$A \cup B$ (сума множин A та B)	$A \cup B$ - подія, яка полягає в тому, що відбувається принаймі одна з подій A або B
—	
$A \cap B$ (переріз множин A і B)	$A \cap B$ - подія, яка полягає в тому, що відбудеться і A , і B .

—

$\bar{A} = \Omega \setminus A$ (доповнення до A) \bar{A} - протилежна подія до A -

Множина \bar{A} складається з тих точок, які не входять в множину A . подія, яка полягає в тому що A не відбудеться

—

$A * B = \emptyset$ $A * B = \emptyset$ - події A та B несумісні (A та B множини, які не перетинаються).

8

$A \setminus B$ (різниця множин A і B) $A \setminus B$ -різниця подій A і B – подія, яка полягає в тому, що відбудеться A і не відбудеться B

$\bigcup_{i=1}^{\infty(n)} A_i$
Сума (об'єднання) $\bigcup_{i=1}^{\infty(n)} A_i$ є подія, яка настає тоді і тільки тоді, коли настає одна з подій A_i .

$\bigcap_{i=1}^{\infty(n)} A_i$
Добуток (або перетин) $\bigcap_{i=1}^{\infty(n)} A_i$ називається подія, яка полягає в тому, що відбуваються всі події A_i , $i=1, 2, 3, \dots$, або всі події A_i , $i=1, 2, 3, \dots, n$.

Задача1. Монету підкидають двічі. Описати простір елементарних подій. Описати події : $A = \{ \text{принаймні один раз з'явиться герб} \}$, подія $B = \{ \text{при другому підкиданні з'явиться герб} \}$.

Задача2. Гральний кубик підкидають двічі. Описати простір елементарних подій. Описати події : $A = \{ \text{сума очок які з'явились дорівнює 8} \}$, подія $B = \{ \text{принаймні один раз з'явиться 6} \}$.

Задача3. З партії, що містить N -виробів, серед яких є n бракованих, взято m виробів. Описати простір елементарних подій. Описати подію A : серед взятих виробів l - бракованих ($n < N$, $l \leq m$)

Розв'язування. Простір елементарних подій Ω складається з усіх можливих партій, що містять m виробів, l (число таких партій C_N^m), A – складається з тих партій m виробів, серед яких є рівно l бракованих (число таких партій $C_n^l C_{N-n}^{m-l}$).

Задача4. Побудувати множину елементарних подій в експерименті, що полягає в виборі з урни, яка містить m білих та n чорних куль, k – куль, де $k < n + m$. Яке число елементарних подій? Розв'язати задачу при умові, що кулі виймаються послідовно по одній.

Задача5. В коробці шість однакових, занумерованих кубиків. Навмання по одному вилучають всі кубики. Скільки елементарних подій містить простір Ω ? Описати подію $A = \{\text{номери вилучених кубиків з'являються в зростаючому порядку}\}$.

Задача 6. Три рази підкидають монету. а) Описати простір елементарних подій;

9

б) описати події: $A = \{\text{двічі випав герб}\}$, $B = \{\text{принаймні один раз випав герб}\}$.

Задача 7. Серед усіх родин з двома дітьми обрано одну. Описати простір елементарних подій і випадкові події: $A = \{\text{в родині є хлопчик і дівчинка}\}$, $B = \{\text{в родині не більше однієї дівчинки}\}$.

Задача 8. З таблиці випадкових чисел навмання вибрані два числа. Події A та B відповідно означають, що вибрано хоча б одне просте та хоча б одне парне число. Що означають події $A \cap B$ та $A \cup B$?

Розв'язування. Подія $A \cap B$ означає появу подій A та B , тобто з двох вибраних чисел одне просте, а друге парне. Подія $A \cup B$ означає появу хоча б однієї з подій A чи B , тобто серед двох вибраних чисел є хоча б одне просте або хоча б одне парне число, або одне з цих чисел просте, друге – парне.

Задача 9. Із множини подружніх пар навмання вибирається одна пара. Подія $A = \{\text{чоловіку більше 30 років}\}$, подія $B = \{\text{чоловік старший за жінку}\}$, подія $C = \{\text{жінці більше 30 років}\}$. З'ясувати зміст подій $A \cap B \cap C$, $A \setminus (B \cap C)$, $A \cap \bar{B} \cap C$.

Розв'язування. $A \cap B \cap C$ – $\{\text{подружжю за 30 років, причому чоловік}$

старший за жінку };

$A \setminus (B \cap A) = (A \text{ але не } B \cap A) = \{ \text{чоловіку за 30 років, але він не старший за жінку} \};$

$A \cap \bar{B} \cap C = \{ \text{подружжю за 30 років, причому чоловік не старший за жінку} \};$

Задача 10. Подія A – хоча б один з трьох приборів які перевіряються бракований. Всі прибори доброякісні. Що означають події: $A \cap B$, $A \cup B$?

Задача 11. Із таблиці випадкових чисел навмання взяте одне число. Подія A – вибране число ділиться на 5; подія B – дане число закінчується нулем. Що означають події $A \setminus B$ та $A \cap \bar{B}$

Задача 12. Підкидають два гральних кубики. Нехай подія $A = \{ \text{сума очок непарна} \}$, подія $B = \{ \text{хоча б на одному кубіку випала одиниця} \}$. Описати події $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap \bar{B}$.

Задача 13. Зроблено 3 постріли по мишені. Нехай A_i – подія, яка полягає в тому, що при i -тому пострілі є влучення ($i=1,2,3$). Виразити через події A_i такі

10

події: а) A – відбулось три влучення; б) B – не було жодного влучення; в) лише одне влучення; г) не менше двох влучень.

Задача 14. Мишень складається з 10 кругів, які обмежені концентричними колами з радіусами r_k ($k=1,2,\dots,10$), причому $r_1 < r_2 < \dots < r_{10}$. Подія A_k –

попадання в круг радіуса r_k ($k=1,2,\dots,10$). Що означають події $B = \bigcap_{k=1}^6 A_k$, $C =$

$\bigcap_{k=5}^{10} A_k$?

Задача 15. Нехай A_1, A_2, \dots, A_n – випадкові події. Довести, що $P(\bigcap_{i=1}^n A_i) = 1 - P(\bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i)$

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i\right)$$

1.3 КЛАСИЧНЕ ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ

Частота випадкової події. Нехай Ω – простір елементарних подій. Розглянемо деякий стохастичний експеримент і подію A , яка спостерігається в цьому експерименті. Повторимо експеримент n раз. Позначимо через $K_n(A)$ – число експериментів, в яких відбулася подія A . Частотою подій A називається відношення

$$v_n(A) = \frac{K_n(A)}{n}.$$

Частота може бути обчислена лише після того, як проведена серія експериментів, і, взагалі кажучи, частота змінюється, при переході від однієї до іншої серії з n експериментів, або з зміною n . Але, як показує досвід, при достатньо великих n для більшості таких серій експериментів частота зберігає майже постійну величину, причому великі відхилення спостерігаються тим рідше, чим більше n .

Якщо при великих n частота $v_n(A)$ події A мало відрізняється від деякого фіксованого значення p , то говорять, що подія A стохастично стійка, а число p є ймовірністю події A . Тобто, ймовірність події A є число близьке до частоти появи події A в довгій серії тотожних експериментів.

11

Ймовірності в дискретних просторах елементарних подій. Простір елементарних подій називається **дискретним**, якщо множина Ω скінченна або зліченна.

Нехай простір $\Omega = \{ \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots \}$ елементарних подій дискретний. Припустимо, що кожній елементарній події ω_k можна поставити у

відповідність невід'ємне число p_k (ймовірність ω_k), причому $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$

$$p(A) = \sum_{\omega_k \in A} p_k$$

. Якщо A – випадкова подія ($A \subset \Omega$), то $p(A)$ – називається ймовірністю події A .

Мають місце властивості:

- a) $P(A) \geq 0$,
- b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, якщо A та B несумісні.
- c) $P(\Omega) = 1$.

Приклад 1. Нехай підкидають симетричний шестиграний кубик. Тоді в якості Ω природньо розглянути множину $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Якщо кубик симетричний, то кожна елементарна подія $\omega = i$ є рівноможливою, тому припишемо їй ймовірність $1/6$. Тим самим буде побудована ймовірнісна модель експерименту, який полягає в підкиданні шестигранного симетричного грального кубика. Якщо A – випадкова подія, яка полягає в тому, що число очок, яке з’явиться, кратне 3, тобто $A = \{3, 6\}$, то $P(A) = 1/6 + 1/6 = 1/3$.

Приклад 2. Нехай симетричну монету підкидають до того часу, поки вперше не з’явиться герб. Тоді $\Omega = \{W_1, W_2, \dots, W_n, \dots, W_\infty\}$, де $W_n = P \dots PГ$ означає, що герб вперше з’явиться при n -тому підкиданні монети, а W_∞ – елементарна подія, яка означає що герб ніколи не з’явиться. Припишемо

W_n ймовірність $1/2^n$, а W_∞ – ймовірність 0. Тоді $\sum_{i=1}^{\infty} p(\omega_i) = 1$. Таким чином, побудована ймовірнісна модель експерименту, який полягає в підкиданні монети до першої появи герба. Підрахуємо тепер ймовірність події A , яка полягає в тому, що буде проведено не більше трьох підкидань монети ($A = \{Г, PГ, PPГ\}$). Маємо

$$P(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

12

Класична схема. Нехай простір Ω складається з n елементарних

рівноможливих подій, тобто $p(\omega) = \frac{1}{n}$ для довільного $\omega \in \Omega$. До складу A входить m з цих подій. В цьому випадку **ймовірність події A** визначається

$$P(A) = \frac{\text{число елементів множини } A}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{m}{n}.$$

Це так зване класичне означення ймовірності.

При розрахунках ймовірностей в класичній схемі мають справу з елементами комбінаторики.

Основний принцип комбінаторики (правило множення).

Нехай треба послідовно виконати k дій. Якщо першу дію можна виконати n_1 – способами, після чого другу – n_2 – способами, потім третю – n_3 – способами і т.д. до k -ї дії, яку можна виконати

n_k – способами, то всі k -дій можуть бути виконані

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_k$$

способами.

Комбінації (сполуки) з n елементів по k . Нехай є множина A , що містить n елементів. Тоді число підмножин множини A , що містить k елементів, дорівнює

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \text{ де } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

Комбінаціями з n елементів $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ по k називають k -елементні підмножини множини $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

Упорядковані множини. Множина з n елементів називається впорядкованою, якщо кожному елементу цієї множини поставлене у відповідність певне число (номер елементу) від 1 до n так, що різним елементам відповідають різні числа. Упорядковані множини вважаються різними, якщо вони відрізняються або своїми елементами, або їх порядком.

Перестановки даної множини. Різні впорядковані множини, які відрізняються порядком елементів (тобто можуть бути утворені з тієї ж самої множини), називаються перестановками цієї множини. Число перестановок множини з n елементів дорівнює $P_n = n!$

Розміщення з n по k . Упорядковані k -елементні підмножини множини, що містять n елементів, називаються розміщеннями з n по k . Число розміщень з n по k дорівнює

13

$$A_n^k = k! C_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$$

Задача 1. Товариство з n чоловік сідає за круглий стіл. Знайти ймовірність того, що певні дві особи займуть місця поряд? Відповідь. $p = \frac{2}{n-1}$.

Задача 2 . З послідовності чисел $1, 2, \dots, n$ відмічено число k . Знайти ймовірність того, що серед двох чисел вибраних навмання з цієї послідовності, одне буде менше k , а друге більше k .

Задача 3 . Замок містить на загальній осі 4 диски, кожний з яких розділений на 5 секторів, які відмічені певними літерами. Замок відкривається тільки в тому випадку, коли літери утворюють певну комбінацію. Яка ймовірність відкрити

замок, якщо установити довільну комбінацію літер? Відповідь $p = \frac{1}{5^4}$.

Задача 4. Підкидають 4 гральних кубика. Знайти ймовірність того, що на всіх кубиках випаде однакове число очок. Відповідь $p = \frac{1}{6^3}$.

Задача 5. Кожна з букв А, У, К, С, З записані на одній із 5-ти карток. Картки розкладаються в довільному порядку. Знайти ймовірність того, що при цьому утворюється слово КАЗУС. Відповідь $p = 1/120$.

Задача 6. Набираючи номер телефону, абонент забув останні три цифри і, пам'ятаючи лише, що ці цифри різні, набрав їх навмання. Знайти ймовірність того, що набрані потрібні цифри. Відповідь $p = 1/720$.

Задача 7. У ліфті 7 пасажирів; ліфт зупиняється на 10-ти поверхах. Яка ймовірність того, що жодного разу два пасажири не вийдуть на одному поверсі? Відповідь $p = \frac{A_{10}^7}{10^7}$.

Задача 8. Обчислити ймовірності того, що дні народження 12 осіб припадуть на різні місяці року. Відповідь $p = \frac{12!}{12^{12}} \approx 0,0005$.

14

Задача 9. В групі r студентів. Яка ймовірність того, що принаймні у двох із них збігаються дні народження? Відповідь. $1 - \frac{A_{365}^r}{(365)^r}$.

Задача 10. В урні a білих та b чорних куль. З урни виймаються дві кулі. Знайти ймовірність того, що обидві кулі будуть білими

Розв'язання. Позначимо через A подію, яка полягає в появі двох білих куль. Число елементів Ω -простору елементарних подій дорівнює $|\Omega| = C_{a+b}^2$. Число елементів Ω , які сприяють появі події A дорівнює $|A| = C_a^2$. Таким чином, згідно

класичній схемі $p(A) = \frac{C_a^2}{C_{a+b}^2}$.

Задача 11. Із колоди в 32 карти навмання вибирається 4. Знайти ймовірність того, що серед них буде хоча б один туз.

Розв'язування.

$$p = 1 - p\{4 \text{ не тузи}\} = 1 - \frac{C_{28}^4}{C_{32}^4} \approx 0,43$$

Задача 12. Із урни, яка містить кулі з номерами 1, 2, ..., N, k раз виймається куля і кожен раз повертається назад. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль утворюють зростаючу послідовність.

Задача 13. Розв'язати попередню задачу при умові, що витягнуті кулі до урни

не повертаються. Відповідь $p = \frac{1}{k!}$.

Задача 14. Товариство складається з 5 чоловіків та 10 жінок. Знайти ймовірність того, що при випадковому групуванні їх на 5 груп по 3 особи в

кожній групі серед трьох осіб буде 1 чоловік. Відповідь $p = \frac{10!5!(3!)^5}{2^5 15!} = \frac{81}{1001}$.

Задача 15. Повна колода карт (52 карти) ділиться пополам. Знайти ймовірність того, що число чорних карт в обох пачках буде однаковим (13). Відповідь $p \approx 0,22$.

15

Задача 16. Літак –бомбардирувальник для виконання бойового завдання повинен пройти через зону зенітної оборони противника, в якій по ньому, незалежно один від одного, ведуть вогонь чотири зенітні гармати. Кожна гармата проводить 10 пострілів, ймовірність попадання в літак при кожному із яких дорівнює 0,02. Для того щоб збити літак достатньо одного попадання. В випадку якщо літак не буде збитий вогнем зенітної артилерії, він виходить на ціль і скидає бомби. Ймовірність виконання бойового завдання прои цьому дорівнює 0,6. Знайти ймовірність того, що бомбардирувальник виконає

завдання , незважаючи на протидію зенітної артилерії. (Вказівка. Розглянути випадкову подію $A = \{\text{непопадання при всіх 40 пострілах}\}$. Відповідь $p = 0,268$.

Задача 17. Проводиться стрільба по деякій цілі, ймовірність попадання в яку при одному пострілі дорівнює 0,2. Стрільба припиняється при першому попаданні. Знайти ймовірність того, що буде проведено рівно 6 пострілів. Відповідь $p = 0,066$.

Задача 18. Послідовність чисел $1, 2, \dots, N$ розбивається навмання на дві рівні групи. Знайти ймовірність того, що а) в кожній групі буде порівно парних та непарних чисел; б) всі числа , кратні N , виявляться в першій групі; в) числа

кратні N , поділяться порівну між групами. Відповідь до пункту в), $p = \frac{C_4^2 C_{4N-4}^{2N-2}}{C_{4N-4}^{2N}}$.

Задача 19. З урни, яка містить n білих та m чорних куль, взяли навмання k куль. Яка ймовірність того, що серед винятих куль буде r білих куль ($r \leq n$) ?

Задача 20. Вкладники банку за сумами вкладів та віком мають такий процентний розподіл:

Вік	Сума вкладу		
	* \$1000	* \$1000-5000	* \$ 5000
* 30 років	5%	15%	8%
30-50 років	8%	25%	20%
* 50 років	7%	10%	2%

16

Нехай A та B – такі події:

$A = \{ \text{у навмання вибраного клієнта вклад більший $ 5000} \}$.

$B = \{ \text{вік навмання вибраного клієнта більший 30 років} \}$.

Визначити: $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$.

1.4 Поняття алгебри та σ - алгебри

В попередньому розділі для дискретних просторів елементарних подій ймовірність $P(A)$ визначалась нами з допомогою ймовірностей $P(\omega)$ елементарних наслідків ω . Нею виявилась функція, визначена на всіх підмножинах A простору елементарних подій Ω , яка має властивості [3]:

- 1). $P(A) \geq 0$.
- 2). $P(\Omega) = 1$.
- 3). Для подій, які не перетинаються A_1, A_2, \dots

$$P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n P(A_j).$$

Але неважко уявити собі задачу, де множина всіх наслідків **незліченна**.

Наприклад, випадкове кидання точки на відрізок $[t_1, t_2]$ (скажемо, експеримент з вимірюванням температури) має **континуум наслідків**, так як результатом може бути довільна точка відрізка. В експериментах, які мають *скінченну або зліченну* множину наслідків (Ω - дискретний простір) *довільна сукупність наслідків була подією*. В прикладі про випадкове кидання точки на відрізок ми зустрінемося з великими труднощами, якщо будемо вважати подією довільну підмножину цього відрізка. Тут в якості подій треба виділити *спеціальний клас підмножин*. Нехай простір елементарних подій Ω є довільна множина, а \mathcal{A} – деяка система підмножин множини Ω .

\mathcal{A} – називається **алгеброю**, якщо:

A1: $\Omega \in \mathcal{A}$.

A2: із того, що $A \in \mathcal{A}$ і $B \in \mathcal{A}$ випливає, що $A \cup B \in \mathcal{A}$, $A \cap B \in \mathcal{A}$.

A3: якщо $A \in \mathcal{A}$, то $\bar{A} \in \mathcal{A}$.

17

Неважко бачити, що тут в умові A2 достатньо вимагати виконання лише одного з 2-ох приведених двох співвідношень. Друге буде виконуватись автоматично. ($A^* B = \overline{\bar{A}^* \bar{B}}$).

Приклад1. Нехай A – деяка підмножина Ω . Тоді клас множин

$\mathcal{A} = \{\Omega, \emptyset, A, \bar{A}\}$ – утворює алгебру.

Приклад2. Нехай $\Omega = [0, 1]$ і \mathcal{A} – система підмножин із Ω , кожна з яких є скінченна сума інтервалів вигляду $[a, b]$, які не перетинаються. Тоді \mathcal{A} – алгебра.

Клас множин \mathcal{S} називається **σ -алгеброю**, якщо властивість A2 виконується для довільних послідовностей множин:

A2': Якщо $\{A_n\}$ є послідовність множин із \mathcal{S} , то $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}$.

Тут як і в A2, достатньо, щоб виконувалось лише одне з цих двох співвідношень. Друге буде наслідком рівності $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n$.

Таким чином, **алгебра** є клас множин замкнутий відносно **скінченного** числа операцій доповнення, об'єднання та перетину.; **σ -алгебра** є клас множин замкнутий відносно **зліченного числа цих операцій**.

Вважатимемо, що сукупність \mathcal{S} всіх підмножин, які ми інтерпритуємо як випадкові події, пов'язані з даним експериментом є σ -алгеброю.

Для того, щоб формалізувати яку-небудь ймовірносну задачу, треба відповідному експерименту приписати **вимірний простір** $\langle \Omega, \mathcal{S} \rangle$, Ω - означає множину елементарних наслідків експерименту, а **алгебра чи σ -алгебра \mathcal{S}** - **виділяє клас подій**. Трійка $\langle \Omega, \mathcal{A}, P \rangle$ називається ймовірностним простором в широкому розумінні, а Трійка $\langle \Omega, \mathcal{S}, P \rangle$, де \mathcal{S} – **σ -алгебра** називається **ймовірнісним простором**.

Розглянемо експеримент, який полягає в тому, що на відрізок $[0,1)$ навмання поставлена точка. Вважається, що всі положення точки “однаково можливі”. Простір елементарних подій для такого експерименту – відрізок $\Omega=[0,1)$. Якщо по аналогії з дискретним випадком задати для кожного ω ймовірність $P(\omega)$, то оскільки всі ω “однаково можливі”, одержимо $P(\omega)=0$ для кожного ω . Будемо вважати, що ймовірність попадання точки на відрізок $I = [a,b] \subset [0,1)$ дорівнює $b-a$. Об’єднанню скінченного числа відрізків які не

перетинаються $\bigcup_{i=1}^m [a_i, b_i] \subset [0,1)$ припишемо ймовірність $\sum_{i=1}^m (b_i - a_i)$.

Розглянемо множину \mathcal{A} всіх інтервалів вигляду $[a,b)$ та скінчених сум таких інтервалів, що не перетинаються. Нехай $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A})$ – найменша σ -алгебра, яка містить клас \mathcal{A} [1]. Така σ -алгебра \mathcal{B} називається **σ -алгеброю борелівських множин** відрізка $[0,1)$. Згідно *теорему Каратеодорі* існує **єдина** ймовірнісна міра $P(\cdot)$ на \mathcal{B} така, що $P([a,b))=b-a$. Будемо розглядати в якості випадкових подій тільки борелівські множини із $[0,1)$. Ймовірністю $A \in \mathcal{B}$ назовемо $P(A)$. Таким чином, ми побудували ймовірнісну модель (Ω, \mathcal{B}, P) експеримента, який полягає в попаданні точки на $[0,1)$, вказавши простір елементарних подій $\Omega=[0, 1)$ та σ -алгебру \mathcal{B} випадкових подій, для яких визначено ймовірність $P(\cdot)$.

Приклад . Двоє студентів A та B домовились зустрітись в інтервалі часу $[0,T]$.

Нехай x час приходу студента A , а y - час приходу студента B . Тоді простором елементарних наслідків експерименту є **незліченна множина**

$$\Omega=\{(x,y); 0 \leq x \leq T, 0 \leq y \leq T \}.$$

Припустимо, що кожен із студентів A та B чекає на другого не більше ніж τ часу, $0 < \tau < T$. Розглянемо **випадкову подію** C , яка полягає в тому, що зустріч відбудеться. Тоді $C=\{(x,y): |x-y| \leq \tau, 0 \leq x \leq T, 0 \leq y \leq T\}$ є **підмножина** із Ω . В цьому випадку уже не можна побудувати ймовірнісну модель, приписуючи ймовірності кожній елементарній події. В цій задачі треба розглянути в

якості випадкових подій многокутники, які містяться в $\Omega= [0,T]^\times [0,T]$.

Припишемо кожному многокутнику K в якості ймовірності $P(K) = \frac{\text{пл}K}{T^2}$. Нехай $\mathcal{B} = \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{K})$ – найменша σ -алгебра, яка містить клас \mathcal{K} многокутників. Кожній множині $C \in \mathcal{B}$ припишемо ймовірність, застосовуючи теорему Каратеодорі про

продовження міри (одержимо $P(C) = \frac{\text{рл}C}{T^2}$; відмітимо, що всі множини із \mathcal{B} мають площу). Отже, побудували ймовірностну модель експерименту $\langle \Omega, \mathcal{B}, P \rangle$. Подія, яка нас цікавить $C = \{(x, y): |x - y| \leq \tau\}$ (зустріч відбудеться) має ймовірність

$$P(C) = \frac{T^2 - (T - \tau)^2}{T^2} = 1 - \left(1 - \frac{\tau}{T}\right)^2. \quad (\text{При } T=1, \tau=1/4, p=7/16).$$

Будемо вважати, що розглядається експеримент, простір елементарних наслідків якого є **область** Ω в n – вимірному евклідовому просторі R^n (приклад такого експерименту: навмання вибрана точка в області Ω).

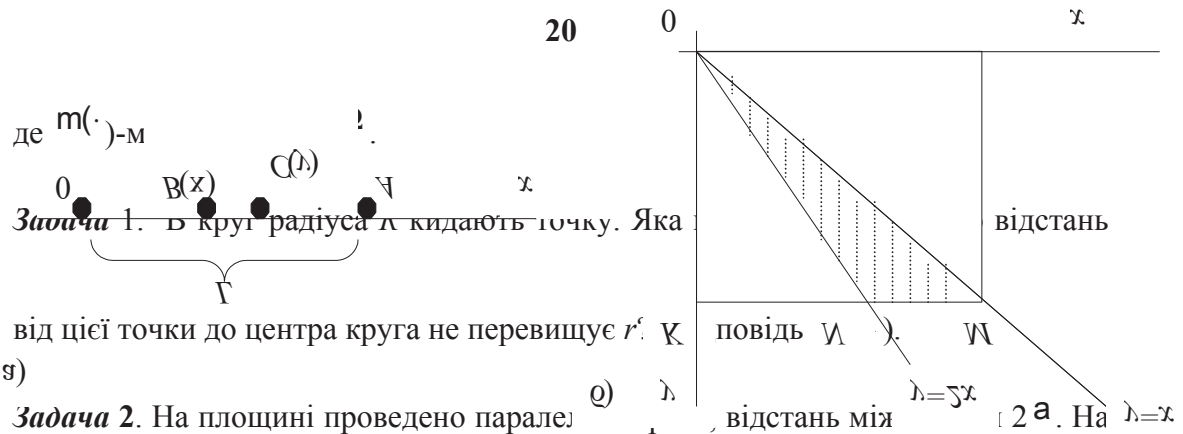
Будемо вважати, що область Ω має **міру Лебега** $m(\Omega)$ (в випадку $n=2$ – площу, в випадку $n=3$ – об’єм). Розглянемо σ -алгебру \mathcal{B} всіх підмножин із Ω , які мають міру Лебега (як відомо з теорії міри, клас таких множин утворює σ -алгебру). Якщо всі точки Ω “однаково можливі”, то покладемо для кожного $A \in \mathcal{B}$

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}.$$

Тоді $\langle \Omega, \mathcal{B}, P \rangle$ є ймовірнісна модель стохастичного експерименту, що розглядається. В цьому випадку кажуть, що йдеться про **геометричні ймовірності**.

В поданих нижче задачах розглядається схема: в деякій області Ω n -вимірного простору навмання беруть точку. Під виразом “точку взято навмання” розуміємо наступне: ймовірність $P(A)$ того, що точку буде взято з області $A \subset \Omega$ дорівнює:

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)},$$



де $m(\cdot)$ -м

Задача 1. В круг радіуса r кидають точку. Яка

від цієї точки до центра круга не перевищує r ?

Задача 2. На площині проведено паралель

площину кидають навмання круг радіусом r ($r < a$). Яка ймовірність того, що круг не перетне жодну з прямих?

Задача 3. На паркетну підлогу навмання кидають монету діаметром d . Паркет має форму квадратів із стороною a ($a > 0$). Яка ймовірність того, що монета не

перетне жодної з сторін квадратів паркету? Відповідь $p = \frac{(a-d)^2}{a^2}$.

Задача 4. На відріжку OA числової осі Ox , довжина якого дорівнює L , навмання поставлено дві точки: $B(x)$ та $C(y)$, причому $y \geq x$. (Координата точки C для зручності подальшого викладання позначена через y). Знайти ймовірність того, що довжина відрізка BC менша за довжину відрізка OB (див. мал.1,а). Передбачається, що ймовірність попадання точки на відрізок пропорційна довжині цього відрізка й не залежить від його розташування на числовій осі.

Розв'язування. Координати точок B та C повинні задовольняти нерівностям

$0 \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq L$, $y \geq x$. В розгляд введемо прямокутну систему координат xOy . В цій системі даним нерівностям задовольняють координати довільної точки, що належить до прямокутного трикутника OKM (див. мал.1,б). Таким чином, цей трикутник можна розглядати як область Ω , координати точок якої є відповідно всі можливі значення координат точок B та C .

мал. 1

Довжина відрізка BC повинна бути меншою за довжину відрізка OB , тобто повинна виконуватись нерівність $y - x < x$, чи $y < 2x$. Остання нерівність

виконується для координат тих точок області Ω (прямокутного трикутника OKM), які розташовані нижче прямої $y = 2x$ (пряма ON). Як бачимо з мал. 1.б, всі ці точки належать до заштрихованого трикутника ONM . Таким чином, цей трикутник можна розглядати як фігуру g , координати точок якої є сприятливими для події, що нас цікавить (довжина відрізка BC менша, ніж довжина відрізка OB). Тому ймовірність можна знайти за формулою:

$$P = \text{Пл. } g / \text{Пл. } \Omega = \text{Пл. } ONM / \text{Пл. } OKM = 1/2.$$

Задача 5. На відрізку OA числової осі Ox з довжиною l навмання поставлені дві точки $B(x)$ та $C(y)$. Знайти ймовірність того, що довжина відрізка BC менше відстані від точки O до найближчої до неї точки. Передбачається, що ймовірність попадання на відрізок пропорційна довжині відрізка і не залежить від його розташування на числовій осі. Відповідь: $p=0,5$.

Задача 6. Стержень довжини l навмання розламали на дві частини. Яка ймовірність того, що довжина меншої частини не перевищує $l/3$? Відповідь

$$p = \frac{2}{3}.$$

Задача 7. На відрізку OA числової осі Ox з довжиною l навмання поставлені дві точки $B(x)$ та $C(y)$. Знайти ймовірність того, що довжина відрізка BC буде меншою, ніж $l/2$. Передбачається, що ймовірність попадання на відрізок пропорційна довжині відрізка й не залежить від його розташування на числовій осі. Відповідь $p=0,75$.

22

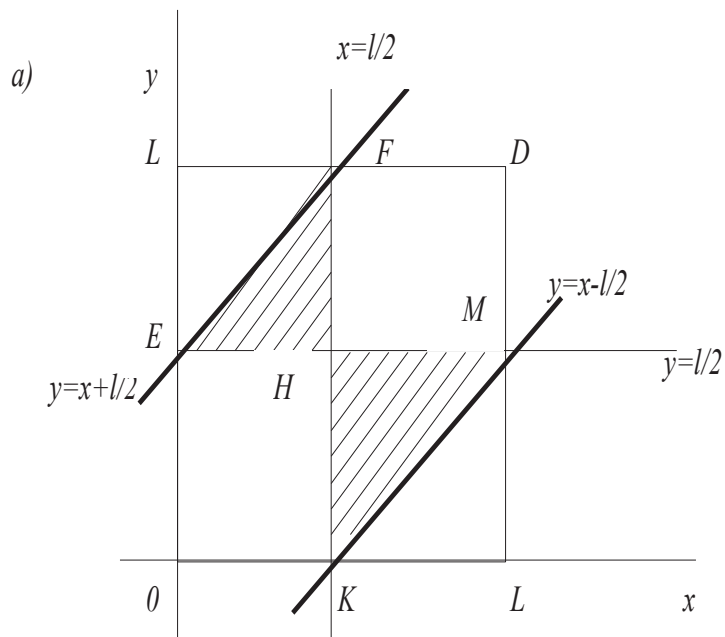
Задача 8. На відрізку довжиною l навмання взято дві точки. Яка ймовірність того, що відстань між ними менша kl , де $0 < k < 1$? Відповідь $(1-(1-k)^2)$.

Задача 9. (Задача Бюффона) Площина розділена паралельними прямими, що знаходяться на відстані $2a$ одна від одної. На площину навмання кидають голку з довжиною $2l$ ($l < a$). Знайти ймовірність того, що голка перетне будь-яку пряму). *Вказівка.* Нехай x -відстань від середини голки до найближчої паралелі, φ - кут, який утворює голка з цією паралеллю. Тоді

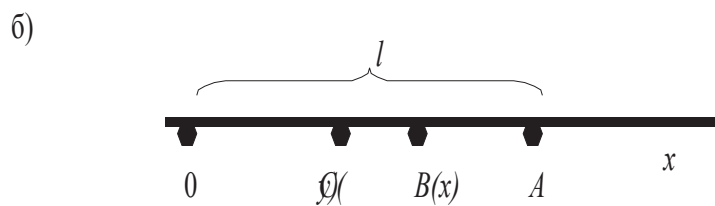
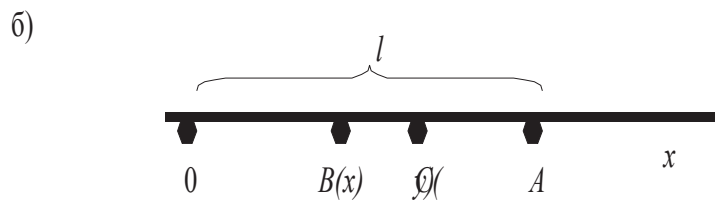
$$\Omega = \{(x, \varphi) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq \varphi \leq \pi\}; A = \{(x, \varphi) : x \leq l \sin \varphi\},$$

$$P(A) = \frac{\int_0^\pi l \sin \varphi d\varphi}{\pi l} = \frac{2l}{\pi l}.$$

Задача 10. На відрізку OA довжиною l числової осі Ox навмання поставлені дві точки $B(x)$ та $C(y)$. Знайти ймовірність того, що з трьох одержаних відрізків можна побудувати трикутник.



Мал.2..



Розв'язування. Для того, щоб із трьох відрізків можна було побудувати

трикутник, кожен з відрізків повинен бути меншим за суму двох інших. Сума всіх трьох відрізків дорівнює l , тому кожен з відрізків повинен бути менше $l/2$.

Розглянемо прямокутну систему координат xOy . Координати будь-яких двох точок B та C повинні задовольняти подвійним нерівностям: $0 \leq x \leq l$, $0 \leq y \leq l$. Цим нерівностям задовольняють координати будь-якої точки $M(x;y)$, що

23

належать квадрату $OLDL$ (мал.2,а). Таким чином, цей квадрат можна розглядати як область Ω , координати точок якої являють всі можливі значення координат точок B та C .

1. Нехай точка C розташована праворуч точки B (мал.2,б). Як вказано вище, довжина відрізків OB , BC , CA повинні бути менше $l/2$, тобто, повинні виконуватись нерівності $x < l/2$, $y-x < l/2$, $l-y < l/2$, або

$$x < l/2, y < x + l/2, y > l/2. \quad (*)$$

2. Нехай точка C розташована ліворуч точки B (мал.2,в). У цьому випадку повинна мати місце нерівність $y < l/2$, $x-y < l/2$, $l-x < l/2$, або

$$y < l/2, y > x - l/2, x > l/2. \quad (**)$$

Як бачимо з мал.2а нерівність $(*)$ виконується для координат точок трикутника EFH , а нерівність $(**)$ – для точок трикутника KHM . Таким чином, заштриховані трикутники можна розглядати як фігуру g , координати точок якої сприяють події, що нас цікавить (з трьох відрізків можна побудувати трикутник).

Шукана ймовірність

$$P = \text{Пл. } g / \text{Пл. } \Omega = (\text{Пл. } EFH + \text{Пл. } KHM) / \text{Пл. } OLDL = 1/4.$$

Задача 11. Яка ймовірність того, що сума двох намання взятих додатніх чисел, кожне з яких не більше 1, не перевищує 1, а їх добуток буде не більше $2/9$.

(Відповідь $p=0,487$).

Задача 12. Стержень довжиною 1 намання розламали на три частини. Яка ймовірність того, що з одержаних частин можна утворити трикутник?

Відповідь $p = \frac{1}{4}$.

Задача 13. На колі радіуса R навмання взято три точки A, B, C . Яка ймовірність того, що трикутник ABC гострокутний? Відповідь $p = \frac{1}{4}$.

24

1.6 Аксиоми теорії ймовірностей

Нехай Ω – простір елементарних подій. Припустимо, що в Ω виділена система \mathfrak{S} підмножин, яка є σ -алгеброю. Це означає, що

$$A_1) \Omega \in \mathfrak{S}$$

$$A_2) \text{ якщо } A \in \mathfrak{S}, \text{ то } \bar{A} = \Omega \setminus A \in \mathfrak{S}$$

$$A_3) \text{ якщо } A_i \in \mathfrak{S}, (i=1, 2, \dots), \text{ то } \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{S}.$$

Множини з \mathfrak{S} називають випадковими подіями. Припустимо, що кожній випадковій події A (множині з \mathfrak{S}) поставлено у відповідність число $P(A)$ (назвемо його ймовірністю випадкової події A) таке, що виконані умови:

$$P_1) P(A) \geq 0 \text{ для кожної } A \in \mathfrak{S};$$

$$P_2) P(\Omega) = 1;$$

$$P_3) \text{ якщо } \{A_i\} \text{ – послідовність випадкових подій така, що } A_i \cap A_j = \emptyset, \text{ то}$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Твердження $A_1, A_2, A_3, P_1, P_2, P_3$ становлять систему аксіом теорії ймовірностей. У такому вигляді аксіоматика теорії ймовірностей була сформульована А.М. Колмогоровим та виявилася надзвичайно плідною для розвитку теорії ймовірностей та цілої низки її нових розділів, насамперед теорії

випадкових процесів.

Зазначимо, що аксіоми P_1 та P_3 вказують на те, що функція множини $P(A)$, визначена на \mathfrak{S} , є мірою, що задовольняє додаткову умову $P(\Omega) = 1$. Така міра називається *ймовірнісною мірою*. Трійка $\langle \Omega, \mathfrak{S}, P \rangle$, де \mathfrak{S} – σ -алгебра підмножин із Ω , а $P(\cdot)$ – ймовірнісна міра на \mathfrak{S} , називається *ймовірнісним простором*. Кажуть, що побудована ймовірнісна модель експерименту, якщо побудовано ймовірнісний простір $\langle \Omega, \mathfrak{S}, P \rangle$, т.б. вказано простір

25

елементарних подій Ω , σ -алгебра \mathfrak{S} випадкових подій та визначена ймовірнісна міра $P(\cdot)$ на \mathfrak{S} .

Приклад.[1].Розглянемо стохастичний експеримент з скінечним числом однаково можливих елементарних подій $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$. В якості \mathfrak{S} візьмемо σ -алгебру всіх підмножин із Ω . Нехай $P(A) = m/n$, де m – число елементарних подій, що входять до A . Тоді всі твердження $A_1, A_2, A_3, P_1, P_2, P_3$ виконані. Таким чином $\langle \Omega, \mathfrak{S}, P \rangle$ – ймовірнісна модель даного експерименту.

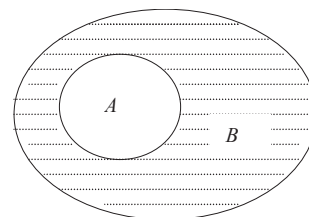
Побудова ймовірнісного простору $\langle \Omega, \mathfrak{S}, P \rangle$ є основним етапом в створенні математичної моделі (формалізації) того чи іншого експеримента.

Задача. За допомогою аксіом теорії ймовірностей довести, що а) $P(\emptyset) = 0$; б) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$; в) якщо $A \subset B$, то $P(A) \leq P(B)$; г) $P(A) \leq 1$ для кожної випадкової події. Розв'язування.

а) $P(\emptyset) = 0$. Це випливає із рівності $\emptyset + \Omega = \Omega$ властивостей ймовірності P_2 та P_3 .

б) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. Так як $A \cup \bar{A} = \Omega$ та $A \cap \bar{A} = \emptyset$, то згідно аксіомі P_3 маємо, що $P(A) + P(\bar{A}) = P(\Omega)$. Тому $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

в) якщо $A \subset B$, то $P(A) \leq P(B)$. Дійсно, так як $B = A \cup \bar{A} \cap B$ й $A \cap \bar{A} \cap B = \emptyset$, то за аксіомою P_3 $P(B) = P(A) + P(\bar{A} \cap B)$. Звідки $P(B) \geq P(A)$, так як $P(\bar{A} \cap B) \geq 0$.



г) $P(A) \leq 1$. Для цього досить скористатися розв'язком попередньої задачі ($A \subset \Omega$) та аксіомою P2 ($P(\Omega)=1$).

1.7 Теорема додавання ймовірностей

Теорема 1. Ймовірність появи однієї з двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

26

Наслідок. Ймовірність появи однієї з декількох попарно несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1 + A_2 + \dots + A_n).$$

Задача 1. Виконується бомбометання по трьох складах боєприпасів, причому скидається одна бомба. Ймовірність влучити в перший склад 0,01; в другий – 0,008; в третій – 0,025. При влучанні в один із складів вибухнуть всі три. Знайти ймовірність того, що склади будуть зірвані.

Розв'язування. Розглянемо події: $A = \{\text{зрив складів}\}$, $A_1 = \{\text{влучання в перший склад}\}$, $A_2 = \{\text{влучання в другий склад}\}$, $A_3 = \{\text{влучання в третій склад}\}$. Очевидно $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Так як при скиданні однієї бомби події A_1, A_2, A_3 несумісні, то $P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 0,01 + 0,008 + 0,025 = 0,043$.

Задача 2. На стелажі бібліотеки в випадковому порядку розставлено 15 підручників, причому 5 із них в перепльоті. Бібліотекар бере навмання три підручника. Знайти ймовірність того, що хоча б один з взятих підручників буде в перепльоті. ($p=67/91$).

Задача 3. Кругова мішень складається з трьох зон: I, II, III. Ймовірність влучання в першу зону при одному пострілі 0,15, в другу 0,23, в третю - 0,17. Знайти ймовірність промаху.

Розв'язування. Позначемо через A - промах, \bar{A} -попадання. Тоді

$\bar{A} = \bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \bar{A}_3$, де \bar{A}_1 , \bar{A}_2 , \bar{A}_3 - попадання відповідно в першу, другу та третю зони

$$P(\bar{A}) = P(\bar{A}_1) + P(\bar{A}_2) + P(\bar{A}_3) = 0,15 + 0,23 + 0,17 = 0,55,$$

$$\text{Звідки } P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 0,45.$$

Задача 4. На екзамені може бути запропоновано N питань. Студент знає відповіді на n питань. Екзаменатор задає студентові k питань, а для того, щоб скласти екзамен, треба відповісти не менше, як на r питань ($r < k$). Яка

ймовірність того, що студент складе екзамен? (Відповідь. $p = \sum_{i=r}^k \frac{C_n^i C_{N-n}^{k-i}}{C_n^k}$).

27

Задача 5. У лотереї є n білетів, серед яких є m виграшних. Обчислити

ймовірність виграшу для того хто має r білетів. Відповідь. $p = \sum_{i=1}^{\min(m,r)} \frac{C_m^i C_{N-m}^{r-i}}{C_n^r}$.

Задача 6. Учасник лотереї “Спортлото” з 49 назв видів спорту (позначених числами від 1 до 49) повинен назвати 6. Повний виграш одержує той, хто правильно вкаже всі шість назв. Виграші одержують і ті, хто вгадає не менше трьох назв. Обчислити ймовірність повного виграшу в спортлото. Обчислити ймовірність того, що учасник спортлото відгадає 5, 4 і 3 назви. Яка ймовірність одержати виграш у “Спортлото”?

Теорема 2. Нехай A та B - випадкові події. Тоді ймовірність появи хоча б однієї з двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих двох подій без ймовірності їх сумісної появи:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Теорема може бути узагальнена на довільне число сумісних подій.

Теорема 3. Нехай A_1, A_2, \dots, A_n – випадкові події. Тоді

$$P(\bigcap_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) - \dots + (-1)^{n-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_n})$$

Приклад (задача про співпадення).

На окремих картках написані числа 1, 2, ..., n. Картки розташовані в “абсолютно випадковому” порядку. Яка ймовірність того, що хоча б одне з чисел буде на місці з таким же номером?

Під “абсолютно випадковим” розташуванням карточок ми розуміємо наступне: всі n! можливих перестановок карточок рівноможливі. Нехай A_i – подія, що полягає в тому, що картка з номером i опиниться на місці з номером i. Треба

обрахувати $P(\bigcap_{i=1}^n A_i)$. Маємо :

$$P(A_1) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n},$$

28

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) = \frac{(n-2)!}{n!},$$

.....

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!}.$$

Використовуючи теорему2, маємо:

$$P(\bigcap_{i=1}^n A_i) = C_n^1 \frac{(n-1)!}{n!} - C_n^2 \frac{(n-2)!}{n!} + C_n^3 \frac{(n-3)!}{n!} - \dots + (-1)^{n-1} C_n^n \frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}$$

Зазначимо, що шукана ймовірність є частковою сумою ряду Тейлора функції 1-

e^x при $x = -1$. Тому для великих n маємо $P(\bigcap_{i=1}^n A_i) \approx 1 - e^{-1} \approx 0,63$.

В частинному випадку, коли n=3, тобто для трьох сумісних подій маємо :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

Задача . По залізничному мосту, незалежно один від одного, проводять серійне бомбометання три літаки. Кожний з літаків скидає одну серію бомб. Ймовірність влучання хоча б однієї бомби з серії першого літака дорівнює 0,2, для другого – 0,3, для третього – 0,4. Знайти ймовірність того, що міст буде зруйновано. Відповідь $p = 0,664$

1.8. Умовні ймовірності, незалежні випадкові події.

Умовна ймовірність. Нехай $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ – ймовірнісний простір. Ω – простір елементарних подій, \mathfrak{F} – σ -алгебра підмножин Ω (σ -алгебра випадкових подій), $P(\cdot)$ – ймовірність, яка визначена σ -алгебрі підмножин Ω , $P(B) > 0$, $B \in \mathfrak{F}$. Умовною ймовірністю події A ($A \in \mathfrak{F}$) при умові, що відбулася

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

подія B , називається величина

Формула множення ймовірностей. Якщо $P(B) > 0$, то

29

$$P(A \cap B) = P(B) P(A/B).$$

Незалежні випадкові події. Випадкові події A та B ($A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$) називаються незалежними, якщо

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A).$$

Незалежні в сукупності випадкові події. Випадкові події A_1, A_2, \dots, A_n ($A_i \in \mathfrak{F}$, $i = 1, 2, \dots, n$) називається незалежними в сукупності, якщо

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$$

при будь-яких $k=1, 2, \dots, n$ та $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$. Якщо ці рівності виконуються при $k=2$, то події A_1, A_2, \dots, A_n називаються **попарно незалежні**.

Задача 1. В урні 2 білі і 3 чорні кулі. З урни підряд виймають дві кулі. Знайти ймовірність того, що обидві кулі білі.

Розв'язування. Позначемо: A - поява двох білих куль.

Подія A є добутком двох подій $A = A_1 \cap A_2$,

де A_1 –поява білої кулі при першому вийманні,

A_2 - поява білої кулі при другому вийманні.

По теоремі множення ймовірностей

$$P(A) = P(A_1) P(A_2/A_1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = 0,1.$$

Задача 2. В урні 2 білі і 3 чорні кулі. З урни виймають дві кулі, але після першого виймання куля повертається в урну, і кулі в урні перемішуються, після чого виймається друга куля. Знайти ймовірність того, що обидві кулі білі.

Розв'язування. В даному випадку події A_1 та A_2 незалежні і

$$P(A) = P(A_1) P(A_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = 0,16.$$

Задача 3. Серед усіх родин з двома дітьми обрано одну. Описати простір елементарних подій і випадкові події: $A = \{ \text{в родині є хлопчик і дівчинка} \}$,

30

$B = \{ \text{в родині не більше однієї дівчинки} \}$. Всі елементарні події однаково ймовірні. Обчислити $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ і довести, що події A та B незалежні.

Задача 4. Пристрій, який працює на прорязі часу t , складається з трьох вузлів, кожен з яких, незалежно один від одного, може на протязі часу t відмовити (вийти зі строю). Відмова хоча б одного вузла приводить до відмови прибору в цілому. За час t надійність (ймовірність безвідмовної роботи) першого вузла дорівнює $p_1 = 0,8$; другого $p_2 = 0,9$; третього $p_3 = 0,7$; Знайти надійність прибору в цілому.

Розв'язування. Позначемо:

A - безвідмовна робота прибора,

A_1 - безвідмовна робота першого вузла,

A_2 - безвідмовна робота другого вузла,

A_3 - безвідмовна робота третього вузла,

маємо: $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$,

звідки по теоремі для незалежних подій

$$P(A) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = p_1 p_2 p_3 = 0,504.$$

Задача 5. Скільки треба взяти гральних кубиків, щоб з ймовірністю, меншій

чим 0,3, можна було чекати, що ні на жодній грані яка випаде не з'явиться шість очок?

Розв'язування. Нехай A подія- ні на жодній грані яка випаде не з'явиться шість очок; події A_i – на i -тій грані кубика, яка випала не з'явиться шість

очок ($i=1,2,\dots, n$). Тоді $A = \bigcap_{i=1}^n A_i$, $P(A_i) = \frac{5}{6}$. Події A_i ($i=1,2,\dots, n$) незалежні в сукупності, тому застосовується теорема множення.

$$P(A) = P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) P(A_2) \dots P(A_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

31

При умові, $\left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0,3$. Таким чином, $n \log\left(\frac{5}{6}\right) \leq \log 0,3$. Звідки $n \geq 6$. Таким чином, шукане число підкидань грального кубика $n \geq 7$.

Задача 6 (приклад Берштейна). На площину кидають тетраедр, три грані якого окрашені відповідно в червоний, зелений, блакитний кольори, а на четверту грань нанесені всі три кольори. Нехай подія $Ч$ полягає в тому, що при підкиданні тетраедра на площину випала грань окрашена червоним кольором і нехай аналогічно визначені події $З$ та $Б$. Оскільки кожний з трьох кольорів нанесений на дві грані, то

$$P(Ч) = P(З) = P(Б) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Далі} \quad P(C \cap Z) = P(C \cap B) = P(Z \cap B) = \frac{1}{4},$$

і, таким чином, події C, Z, B попарно незалежні. Але ці події не є незалежні в

$$\text{сукупності, тому що} \quad P(C \cap Z \cap B) = \frac{1}{4} \neq P(C)P(Z)P(B) = \frac{1}{8}.$$

Задача 7. Підкидають два гральних кубика. Розглянемо випадкові події:

A_1 - на першому кубику випало парне число очок;

A_2 - на другому кубику випало непарне число очок ;

A_3 - сума очок на кубиках непарна. Довести, що події A_1, A_2, A_3 попарно незалежні, але не є незалежними в сукупності.

Задача 8. Довести, що якщо A та B незалежні, то \bar{A} й B , A й \bar{B} , \bar{A} й \bar{B} - теж незалежні (спадкова властивість незалежності).

Задача 9 Події A та B_1 й A та B_2 – незалежні, причому B_1 та B_2 несумісні. Довести, що події A та $B_1 \cap B_2$ – незалежні.

Задача 10. З множини всіх родин, які мають двох дітей обрано одну родину. Всі елементарні події однаково ймовірні. Яка ймовірність того що: а) в цій родині два хлопчики, якщо відомо, що в ній є один хлопчик? б) в родині два хлопчики, якщо відомо, що старша дитина хлопчик ?

Задача 11. Відомо, що 5% чоловіків і 0,25% всіх жінок- дальтоники. Навмання обрана особа- дальтоник. Яка ймовірність того, що це чоловік ? (Вважати, що

32

чоловіків і жінок однакова кількість) (Вказівка. Розглянути випадкові події:

A -обрана особа є чоловік; B -Обрана особа є жінкою; C -обрана особа дальтоник . Відповідь $p = \frac{20}{21}$).

Задача 12. В цеху працюють сім чоловіків та три жінки. По табельним номерам навмання відібрані три чоловіка. Знайти ймовірність того, що всі відібрані особи виявляться чоловіками.

Розв'язування. Нехай подія A -першим відібраний чоловік; B - другим

відібраний

чоловік; С - третім відібраний чоловік. $P(A) = \frac{7}{10}$; $P(B/A) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ - ймовірність того, що другим був відібраним чоловік, при умові, що першим вже був відібраний чоловік; $P(C/A \cap B) = \frac{5}{8}$ - ймовірність того, що третім був відібраним чоловік, при умові, що вже відібрані два чоловіка.

Шукана ймовірність того, що всі три вибрані особи будуть чоловіками,

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) P(B/A) P(C/A \cap B) = \frac{7}{10} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8} = \frac{7}{24}.$$

Задача 13. Довести, що

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \prod_{k=1}^{n-1} P(A_{k+1} / A_1 \cap \dots \cap A_k).$$

(Вказівка. Скористатися методом математичної індукції).

Задача 14. Події A_1, A_2, \dots, A_n незалежні в сукупності і $P(A_k) = p_k$. Яка ймовірність того, що відбудеться принаймі одна з подій A_1, A_2, \dots, A_n .

Задача 15. При одному циклі огляду раділокаційної станції, що стежить за космічним об'єктом, об'єкт буде виявлено з ймовірністю p . Виявлення об'єкта в кожному циклі відбудеться незалежно від інших. Проведено n циклів огляду. Яка ймовірність того, що об'єкт буде виявлено?

Відповідь. $p = 1 - (1-p)^n$.